

MEĐIMURSKO VELEUČILIŠTE U ČAKOVCU



# ELEKTROMAGNETIZAM – RIJEŠENI ZADACI

Valentina Novak

Čakovec, siječanj 2020.

Autor:

Valentina Novak, predavač

Recenzenti:

doc. dr. sc. Ana Sušac

dr. sc. Katarina Jeličić

Lektor:

Patricija Kozar, prof.

Nakladnik:

Međimursko veleučilište u Čakovcu

Za nakladnika:

doc. dr. sc. Igor Klopotan

ISBN: 978-953-8095-15-3

Copyright © Međimursko veleučilište u Čakovcu

## Sadržaj:

1. Elektrostatika	4
2. Elektrodinamika	14
3. Magnetizam	24
4. Elektromagnetska indukcija	35
5. Literatura	41

# ELEKTROSTATIKA

Količina naboja uvijek je cjelobrojni višekratnik elementarnog naboja.

$$Q = N \cdot e \quad N = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4 \dots$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Prostorna gustoća naboja  $\rho$  definirana je relacijom:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV}$$

Coulombov zakon

Elektrostatska sila između dvaju točkastih naboja ( $Q_1$  i  $Q_2$ ) proporcionalna je produktu njihovih naboja, a obrnuto proporcionalna kvadratu njihove udaljenosti ( $r$ ).

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

$$k = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 \epsilon_r}$$

$\epsilon_0 \rightarrow$  permitivnost vakuumu (dielektrična konstanta vakuumu)

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$$

$\epsilon_r \rightarrow$  relativna permitivnost (relativna dielektrična konstanta)

Coulombov zakon možemo pisati i pomoću izraza:

$$F = \frac{k_0}{\epsilon_r} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \text{ gdje je } k_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ C}^{-2} \text{ N m}^2.$$

Za  $\epsilon_r = 1$  (kada se naboji nalaze u vakuumu ili zraku) vrijedi:  $k = k_0$

Električno polje  $\vec{E}$  definiramo kao omjer električne sile i naboja  $q$ .

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Iznos električnog polja točkastog naboja  $Q$  na udaljenosti  $r$  od tog naboja:

$$E = k \frac{Q}{r^2}$$

Rad za premještanje naboja  $q$  iz točke A u točku B ( $r_B > r_A$ ) u električnom polju točkastog naboja  $Q$ :

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

Električna potencijalna energija probnog naboja  $q$  na udaljenosti  $r$  od točkastog naboja  $Q$ :

$$E_{ep} = k \frac{Qq}{r}$$

$$\Delta E_{ep} = E_{pB} - E_{pA} = -W_{AB} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

Potencijal  $\varphi$  jednak je radu  $W$  koji je potrebno obaviti da probni naboj  $q$  iz beskonačnosti, gdje je električna sila jednaka nuli, dovedemo u neku točku električnog polja:

$$\varphi = \frac{W_{\infty \rightarrow r}}{q}$$

Potencijal  $\varphi$  na udaljenosti  $r$  od točkastog naboja  $Q$ :

$$\varphi = k \frac{Q}{r}$$

Napon  $U$  između dviju točaka električnog polja jednak je radu koji je potrebno obaviti da probni naboj  $q$  dovedemo iz točke A u točku B.

$$U = \frac{W_{A \rightarrow B}}{q}$$

Napon je razlika potencijala dviju točaka A i B u električnom polju.

$$U = \varphi_A - \varphi_B$$

Napon između ploča kondenzatora udaljenima za  $d$  u homogenom električnom polju iznosa  $E$  dan je izrazom:

$$U = E d$$

Električni kapacitet je omjer naboja  $Q$  i električnog napona  $U$ :

$$C = \frac{Q}{U}$$

Električni kapacitet pločastog kondenzatora definiran je izrazom:

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$$

Električni kapacitet kugle polumjera  $R$  definiran je izrazom:

$$C = 4 \pi \epsilon_0 \epsilon_r R$$

Energija električnog polja kondenzatora dana je izrazom:

$$W = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} U^2 C$$

Spajanje kondenzatora

a) serijski

Naboj na pločama kondenzatora je jednak:

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots = Q_n$$

Ukupni napon jednak je zbroju napona na pojedinim kondenzatorima:

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

Ukupan kapacitet za  $n$  serijski spojenih kondenzatora možemo dobiti izrazom:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

b) paralelno

Napon na svim kondenzatorima je jednak:

$$U = U_1 = U_2 = U_3 = \dots = U_n$$

Ukupni naboj jednak je zbroju naboja na pojedinim kondenzatorima:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$

Ukupan kapacitet za  $n$  paralelno spojenih kondenzatora dan je izrazom:

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

### Primjer 1.

Dvije kuglice istih masa i polumjera obješene su na nitima tako da im se površine dodiruju. Nakon što smo svaku kuglicu nabili nabojem  $3 \cdot 10^{-7}$  C, one se otklone tako da međusobno zatvaraju kut  $60^\circ$ . Odredite masu svake kuglice ako je udaljenost od mjesta gdje je nit obješena do središta kuglice 30 cm.

Rješenje:

$$Q_1 = Q_2 = 3 \cdot 10^{-7} \text{ C}$$

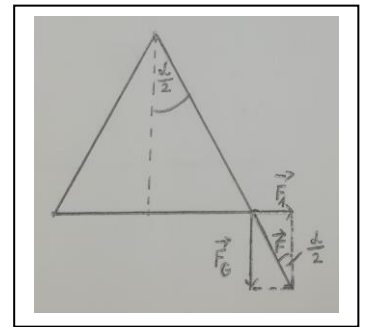
$$\alpha = 60^\circ$$

$$\ell = 0,3 \text{ m}$$

---

$$m = ?$$

Na kuglicu u označenom položaju djeluje odbojna Coulombova sila  $\vec{F}_1$  i sila teža vertikalno prema dolje ( $\vec{F}_G$ ).



$$F_1 = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

Pomoću trigonometrijske funkcije tangens odredimo odnos sila koje djeluju na kuglicu.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{F_1}{G}$$

$$F_1 = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot F_G$$

Na crtežu možemo prepoznati jednakostraničan trokut budući da kut između niti iznosi  $60^\circ$ , pa vrijedi:

$$\ell = r$$

Uzevši u obzir prethodne izraze, iznos sile teže  $\vec{F}_G$  možemo pisati:

$$F_G = \frac{F_1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

$$m g = \frac{k Q_1 Q_2}{r^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

$$m = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (3 \cdot 10^{-7})^2}{0,3^2 \cdot \tan 30^\circ \cdot 9,81}$$

$$m = 1,6 \text{ g}$$

### Primjer 2.

Na vrhovima jednakostraničnog trokuta stranice 5 cm nalaze se naboji  $Q_1 = 3 \text{ nC}$  i  $Q_2 = -4,5 \text{ nC}$  i  $Q_3 = 6 \text{ nC}$ . Odredite ukupnu silu koja djeluje na naboj  $Q_3$ .

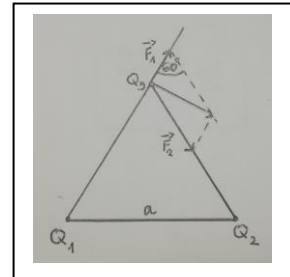
Rješenje:

$$Q_1 = 3 \text{ nC}$$

$$Q_2 = -4,5 \text{ nC}$$

$$Q_3 = 6 \text{ nC}$$

$$a = 5 \text{ cm}$$



---


$$F = ?$$

Između  $Q_1$  i  $Q_3$  djeluje odbojna sila  $\vec{F}_1$ , a između  $Q_2$  i  $Q_3$  privlačna sila  $\vec{F}_2$ . Na naboj  $Q_3$  djeluju  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  kojima je rezultanta  $\vec{F}$ .

$$F_1 = k \frac{Q_1 Q_3}{a^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-9} \cdot 6 \cdot 10^{-9}}{0,05^2}$$

$$F_1 = 6,5 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

$$F_2 = k \frac{Q_2 Q_3}{a^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{4,5 \cdot 10^{-9} \cdot 6 \cdot 10^{-9}}{0,05^2}$$

$$F_2 = 9,7 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

Iznos rezultantne sile  $F$  odredit ćemo koristeći kosinusov poučak.

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1 F_2 \cos 60^\circ$$

$$F = \sqrt{(6,5 \cdot 10^{-5})^2 + (9,7 \cdot 10^{-5})^2 - 2 \cdot 6,5 \cdot 10^{-5} \cdot 9,7 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$F = 8,6 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$



### Primjer 3.

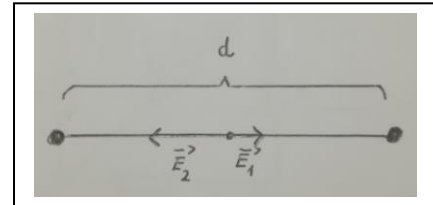
Dva točkasta naboja, 1 nC i 4 nC, nalaze se na međusobnoj udaljenosti od 10 cm. Kolika je jakost električnog polja u točki koja se nalazi na spojnici između tih naboja, na jednakoj udaljenosti od oba naboja?

Rješenje:

$$Q_1 = 3 \text{ nC}$$

$$Q_2 = -4,5 \text{ nC}$$

$$d = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$$



---

$$E = ?$$

Izračunamo jakost polja svakog od naboja u promatranoj točki, a iznos rezultatnog vektora dobivamo oduzimanjem iznosa manjeg vektora od iznosa većeg vektora jer su vektori  $\vec{E}_1$  i  $\vec{E}_2$  suprotnog smjera.

$$E_1 = k \frac{Q_1}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-9}}{0,05^2} = 3600 \text{ N/C}$$

$$E_2 = k \frac{Q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-9}}{0,05^2} = 14400 \text{ N/C}$$

$$E = E_2 - E_1 = 14\,400 - 3600 = 10\,800 \text{ N/C}$$

### Primjer 4.

U polju naboja  $Q = 10^{-6} \text{ C}$  nalazi se čestica mase  $m = 5 \cdot 10^{-3} \text{ g}$ , naboja  $q = 10^{-8} \text{ C}$ . Odredi brzinu koju će čestica početne brzine  $v_0 = 0 \text{ m/s}$  postići gibajući se u tom polju od udaljenosti  $r_1 = 0,2 \text{ m}$  do  $r_2 = 1 \text{ m}$ . Sile trenja i otpora mogu se zanemariti.

Rješenje

$$Q = 10^{-6} \text{ C}$$

$$m = 5 \cdot 10^{-3} \text{ g}$$

$$q = 10^{-8} \text{ C}$$

$$r_1 = 0,2 \text{ m}$$

$$r_2 = 1 \text{ m}$$

$$v_0 = 0 \text{ m/s}$$

---

$$v_1 = ?$$

Nabijena čestica ima kinetičku energiju dok se giba, a definirana je izrazom

$$E_k = \frac{mv^2}{2}.$$

Električna potencijalna energija definirana je izrazom  $E_e = \frac{kQq}{r}$ .

Uzevši u obzir zakon očuvanja energije (ZOE), možemo zapisati sljedeću jednakost:

$$E_{k0} + E_{e0} = E_{k1} + E_{e1}$$

Početna brzina čestice je 0 pa vrijedi  $E_{k0} = 0$ .

$$\frac{kQq}{r_1} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{kQq}{r_2}$$

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{kQq}{r_1} - \frac{kQq}{r_2}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2kqQ}{m} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}$$

$$v_1 = 12 \text{ m/s}$$

### Primjer 5.

Napon između horizontalnih ploča kondenzatora je 10 V, a razmak ploča je 0,1 m. Kapljica ulja mase  $10^{-13}$  kg lebdi u električnom polju. Izračunajte naboj kapljice.

Rješenje:

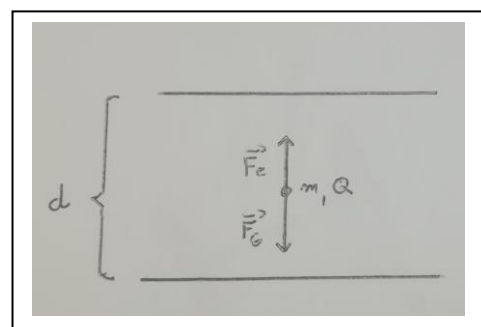
$$U = 10 \text{ V}$$

$$d = 0,1 \text{ m}$$

$$m = 10^{-13} \text{ kg}$$

---


$$Q = ?$$



Na kapljicu ulja djeluje sila teža prema dolje ( $\vec{F}_G$ ) i električna sila prema gore ( $\vec{F}_e$ ).

$$F_G = m g$$

$$F_e = E Q$$

Da bi kapljica lebdjela mora biti zadovoljen sljedeći uvjet: navedene sile moraju biti istog iznosa i suprotnog smjera.

$$F_e = F_G$$

$$E Q = m g$$

$$E = \frac{U}{d}$$

$$Q = \frac{m g d}{U} = \frac{10^{-13} \cdot 9,81 \cdot 0,1}{10}$$

$$Q = 9,81 \cdot 10^{-15} \text{ C}$$

### Primjer 6.

Sila između dvaju točkastih naboja u nekoj tekućini udaljenih 20 cm jednaka je sili kojom ti naboji u zraku djeluju kada su udaljeni 30 cm. Kolika je relativna permitivnost tekućine?

Rješenje:

$$r_1 = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$$

$$r_2 = 30 \text{ cm} = 0,3 \text{ m}$$

$$F_1 = F_2$$

---

$$\epsilon_r = ?$$

$$F_1 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{Q_1 Q_2}{r_1^2} \rightarrow \text{sila između dvaju točkastih naboja u nekoj tekućini}$$

$$F_2 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_2^2} \rightarrow \text{sila između dvaju točkastih naboja u zraku}$$

Budući da su sile jednake, izjednačit ćemo desne strane jednadžbi.

$$\frac{1}{4 \pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{Q_1 Q_2}{r_1^2} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_2^2}$$

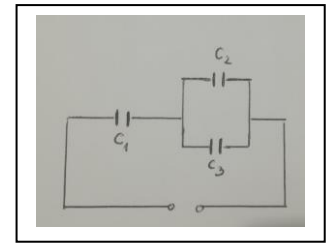
$$\frac{1}{\epsilon_r r_1^2} = \frac{1}{r_2^2}$$

$$\epsilon_r = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{0,3^2}{0,2^2}$$

$$\epsilon_r = 2,25$$

### Primjer 7.

Crtež prikazuje spoj triju kondenzatora kapaciteta  $C_1 = 2 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 1 \mu\text{F}$  i  $C_3 = 3 \mu\text{F}$  priključenih na izvor napona  $U = 24 \text{ V}$ .



- Odredite naboj na svakom kondenzatoru.
- Odredite napon na svakom kondenzatoru.

Rješenje:

$$C_1 = 2 \mu\text{F}$$

$$C_2 = 1 \mu\text{F}$$

$$C_3 = 3 \mu\text{F}$$

$$U = 24 \text{ V}$$

- 
- Ukupan naboj je  $Q = C_{UK} \cdot U$ .

Kondenzatori 2 i 3 su spojeni paralelno pa je  $C_{23} = C_2 + C_3 = 4 \mu\text{F}$ , a s kondenzatorom 1 su u seriji pa ukupan kapacitet računamo po formuli:

$$\frac{1}{C_{UK}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23}},$$

$$C_{UK} = 1,33 \mu\text{F}, \text{ pa slijedi}$$

$$Q = 32 \mu\text{C}.$$

Na kondenzatoru 1 je točno toliko naboja,  $Q_1 = 32 \mu\text{C}$ , a na paralelnom spoju dvaju kondenzatora taj naboj raspoređuje se tako da je napon na svakom kondenzatoru jednak ( $U_2 = U_3$ ).

$$\frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_3}{C_3} \quad Q_2 + Q_3 = 32 \mu\text{C}$$

$$Q_2 = 8 \mu\text{C} \quad Q_3 = 24 \mu\text{C}$$

- Za serijski spoj vrijedi  $U = U_1 + U_{23} = 24 \text{ V}$

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = 16 \text{ V},$$

$$U_2 = U_3 = 8 \text{ V}$$

Zadaci:

1. U bljeskalici fotoaparata nalazi se kondenzator kapaciteta  $350 \mu\text{F}$ . Kondenzator se nabije do napona  $300 \text{ V}$ . Bljesak koji proizvede bljeskalica traje  $0,1 \text{ ms}$ . Kolika je srednja snaga bljeska?
2. Pločasti kondenzator ispunjen je dielektrikom relativne permitivnosti 6. Površina svake ploče kondenzatora iznosi  $6,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ , ploče su međusobno razmaknute za  $2 \text{ mm}$ , a naboj na svakoj ploči iznosi  $4 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ . Odredite napon između ploča kondenzatora.
3. Dva točkasta naboja  $Q_1 = 9 \mu\text{C}$  i  $Q_2 = 16 \mu\text{C}$  učvršćena su u prostoru na međusobnoj udaljenosti  $r = 7 \text{ cm}$ . Na koju udaljenost  $x_1$  od prvog naboja, odnosno  $x_2$  od drugog naboja treba staviti treći naboj  $Q_3$  da rezultantna sila na njega bude jednaka nuli?
4. Zadan je kapacitet pločastog kondenzatora u zraku  $10 \text{ pF}$ . Povećamo li razmak između ploča kondenzatora za  $1 \text{ cm}$ , kapacitet kondenzatora smanji se na vrijednost  $8 \text{ pF}$ . Kolika je površina ploča kondenzatora i početna udaljenost između ploča?
5. Razlika potencijala između ploča kondenzatora kapaciteta  $C_1$  je  $300 \text{ V}$ , a razlika potencijala između ploča kondenzatora kapaciteta  $C_2$  je  $100 \text{ V}$ . Koliki je omjer njihovih kapaciteta, ako je nakon njihovog paralelnog spajanja razlika potencijala  $250 \text{ V}$ ?

Rješenja:

1.  $\bar{P} = 157,5 \text{ kW}$
2.  $U = 243 \text{ V}$
3.  $x_1 = 3 \text{ cm}$  i  $x_2 = 4 \text{ cm}$
4.  $S = 0.045 \text{ m}^2$ ,  $d_1 = 4 \text{ cm}$
5.  $\frac{C_1}{C_2} = 3$

# ELEKTRODINAMIKA

Jakost stalne struje kroz neki vodič omjer je električnog naboja  $\Delta Q$  i vremena  $\Delta t$  potrebnog da taj naboj prođe kroz presjek vodiča:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Ako je jakost struje stalna, vrijedi:

$$I = \frac{Q}{t}$$

Jakost električne struje možemo definirati i izrazom:

$$I = S \bar{v} e n,$$

gdje je  $n$  broj slobodnih elektrona u jedinici volumena,  $e$  elementarni naboj,  $S$  površina presjeka vodiča, a  $\bar{v}$  iznos srednje brzine njihovog usmjerenog gibanja.

Jakost struje koja teče vodičem razmjerna je naponu između krajeva vodiča, a obrnuto razmjerna otporu vodiča.

$$I = \frac{U}{R}$$

Električni otpor homogenog vodiča u obliku žice, pri konstantnoj temperaturi, razmjernan je s električnom otpornošću  $\rho$  i s duljinom vodiča  $\ell$ , a obrnuto je razmjernan s površinom presjeka žice  $S$ .

$$R = \rho \frac{\ell}{S}$$

Električni otpor materijala ovisi o temperaturi. Povećanjem temperature, otpor metala se povećava, a kod mekih materijala (npr. poluvodiča) otpor pada kada temperatura raste.

Izraz:

$$R_t = R_0 (1 + \alpha \Delta t)$$

vrijedi za čiste metale u području "običnih" temperatura (npr. 0 °C do 100 °C). U izrazu se  $R_0$  odnosi na otpor pri 0°C,  $R_t$  na otpor pri temperaturi  $t$ , a  $\alpha$  je temperaturni koeficijent otpora.

Promjena temperature u Celzijevim stupnjevima °C jednaka je promjeni temperature u kelvinima K pa prethodni izraz možemo također zapisati i kao:

$$R_T = R_0 (1 + \alpha \Delta T)$$

Ohmov zakon za cijeli strujni krug definiran je izrazom:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_u},$$

gdje je  $\mathcal{E}$  elektromotorni napon (jednak radu neelektrične sile pri premještanju jediničnog pozitivnog naboja s negativnog pola na pozitivni),  $R$  otpor vanjskog dijela strujnog kruga,  $R_u$  unutarnji otpor izvora, a  $I$  jakost električne struje koja teče tim strujnim krugom.

Kirchhoffova pravila, koja su utemeljena na zakonima očuvanja električnog naboja i energije, omogućuju proračun struje i napona u električnim strujnim krugovima.

Prvo Kirchhoffovo pravilo

Zbroj jakosti struja koje ulaze u čvor jednak je zbroju jakosti struja koje iz čvora izlaze.

$$\sum_i I_i = 0$$

Drugo Kirchhoffovo pravilo

Algebarski zbroj svih elektromotornih sila u zatvorenom strujnom krugu jednak je zbroju svih padova napona na otporima u tom strujnom krugu.

$$\sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i R_i I_i$$

Snaga električne struje definirana je:

$$P = \frac{dW}{dt} = U \frac{dQ}{dt} = UI$$

U slučaju da se napon i struja ne mijenjaju s vremenom, rad je jednak:

$$W = UQ = UI t$$

Spajanje otpornika

a) Serijski

Struja koja prolazi kroz sve otpornike je jednaka:

$$I = I_1 = I_2 = I_3 = \dots = I_n$$

Ukupan napon jednak je zbroju napona na pojedinim otpornicima.

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

Ukupan otpor za  $n$  serijski spojenih otpornika dan je izrazom:

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

b) Paralelno

Ukupna struja jednaka je zbroju struja kroz pojedine otpornike.

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

Napon na svim otpornicima je jednak:

$$U = U_1 = U_2 = U_3 = \dots = U_n$$

Ukupan otpor za  $n$  paralelno spojenih otpornika dan je izrazom:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

### Primjer 1.

Žicu od aluminija zamjenjujemo bakrenom žicom jednake duljine. Koliko puta manji mora biti presjek bakrene žice da bi otpor ostao isti? ( $\rho_{Al} = 2,8 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$ ,  $\rho_{Cu} = 1,72 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$ .)

Rješenje:

$$\rho_{Al} = 2,8 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$$

$$\rho_{Cu} = 1,72 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$$

---

$$\frac{S_{Cu}}{S_{Al}} = ?$$



Električni otpor žice iskazujemo izrazom  $R = \rho \frac{\ell}{S}$ .

Električni otpori su im, prema uvjetima zadatka, jednaki pa slijedi:

$$\rho_{Al} \frac{\ell}{S_{Al}} = \rho_{Cu} \frac{\ell}{S_{Cu}}$$

Duljine žica su, prema tekstu zadatka, jednake pa vrijedi:

$$\frac{S_{Cu}}{S_{Al}} = \frac{\rho_{Cu}}{\rho_{Al}} = 0,61$$

### Primjer 2.

U nekoj žici otpora  $20 \Omega$  razvijena je toplina od  $900 \text{ J}$  u vremenu od  $5 \text{ s}$ . Odredite broj elektrona koji su u to vrijeme prošli kroz presjek žice.

Rješenje:

$$R = 20 \Omega$$

$$Q = 900 \text{ J} = W$$

$$t = 5 \text{ s}$$

---

$$N = ?$$

Rad električne struje iskazujemo izrazom:  $W = I^2 R t$

Iz navedenog izraza možemo eksplicitno izraziti:

$$I = \sqrt{\frac{W}{R \cdot t}}$$

Električnu struju također možemo izraziti pomoću izraza:

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{N \cdot e}{t}$$

Izjednačavanjem prethodnih izraza slijedi:

$$\sqrt{\frac{W}{R \cdot t}} = \frac{N \cdot e}{t}$$

$$\sqrt{\frac{900}{20 \cdot 5}} = \frac{N \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{5}$$

$$N = \frac{5}{1,6 \cdot 10^{-19}} \sqrt{\frac{900}{20 \cdot 5}}$$

$$N = 9,38 \cdot 10^{19}$$

### Primjer 3.

Kad na bateriju spojimo paralelno dva otpornika svaki otpora  $2 \Omega$ , krugom teče struja jakosti  $3 \text{ A}$ . Ako otpornike spojimo serijski, krugom teče struja  $1,2 \text{ A}$ . Nađite unutarnji otpor baterije.

Rješenje:

$$R_1 = R_2 = 2 \Omega$$

$$I_p = 3 \text{ A}$$

$$I_s = 1,2 \text{ A}$$

---


$$R_u = ?$$

Za paralelni spoj vrijedi:

$$R_p = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

U ovom zadatku ukupan otpor paralelno spojenih otpornika je:  $R_p = \frac{2 \cdot 2}{2+2} = 1 \Omega$

Za serijski spoj vrijedi:

$$R_s = R_1 + R_2$$

U ovom zadatku ukupan otpor serijski spojenih otpornika je:

$$R_s = 2 + 2 = 4 \Omega$$

Kad je izvor elektromotornog napona ( $\mathcal{E}$ ) priključen u strujni krug, njegov se napon raspodjeljuje na pad napona na unutarnjem otporu  $R_u$  izvora ( $I \cdot R_u$ ) i pad napona ( $U = I \cdot R$ ) u vanjskome krugu:

$$\mathcal{E} = I R_u + I R.$$

Računamo unutarnji otpor:

$$\mathcal{E} = I_p R_u + I_p R_p$$

$$\mathcal{E} = I_s R_u + I_s R_s$$

---


$$I_p R_u + I_p R_p = I_s R_u + I_s R_s$$

$$3(Ru + 1) = 1,2(Ru + 4)$$

$$3Ru - 1,2Ru = 4,8 - 3$$

$$Ru = 1 \Omega$$

#### Primjer 4.

Nit od volframa ima pri 0 °C duljinu 5 cm i površinu presjeka  $1,1 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^2$ . Kolika je jakost struje kroz nit kada se ona priključi na napon 120 V ako je tada njezina temperatura 2900°C? Termički koeficijent otpora volframa je  $4,2 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ . Pretpostavite da je otpor volframa linearno ovisan o temperaturi. Električna otpornost volframa je  $5,5 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ .

Rješenje:

$$t_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\ell = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$$

$$S = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^2 = 1,1 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2$$

$$U = 120 \text{ V}$$

$$t = 2900 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\alpha = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

$$\rho_{\text{volfram}} = 5,5 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$$

---

$$I = ?$$

U ovom slučaju primijenit ćemo Ohmov zakon i uzeti u obzir matematički izraz ovisnosti električnog otpora o temperaturi. Riječ je o sljedećim izrazima:

$$I = \frac{U}{R}$$

$$R = R_0 (1 + \alpha \Delta t)$$

Električni otpor na temperaturi 0°C odredit ćemo izrazom:

$$R_0 = \rho \frac{\ell}{S}$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{R_0 (1 + \alpha \Delta t)}$$

$$R_0 = \rho \frac{\ell}{S} = 5,5 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{0,05}{1,1 \cdot 10^{-9}} = 2,5 \Omega$$

$$I = \frac{120}{2,5 (1 + 4,2 \cdot 10^{-3} \cdot 2900)}$$

$$I = 3,64 \text{ A}$$

### Primjer 5.

Vodič od željeza duljine  $\ell = 2 \text{ m}$  priključen je u vremenu  $t = 0,5 \text{ s}$  na napon  $12 \text{ V}$ . Odredite promjenu temperature tog vodiča. Gustoća željeza iznosi  $\rho_{Fe} = 7,9 \text{ kg/dm}^3$ , specifični toplinski kapacitet  $c = 460 \text{ J/kg K}$ , električna otpornost  $\rho = 10^{-7} \Omega \text{ m}$ . Zanimajte promjenu otpora s temperaturom i prijelaz topline u okolinu.

Rješenje:

$$\ell = 2 \text{ m}$$

$$U = 12 \text{ V}$$

$$t = 0,5 \text{ s}$$

$$\rho_{Fe} = 7,9 \text{ kg/dm}^3 = 7,9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$c = 460 \text{ J/kg}$$

$$\rho = 10^{-7} \Omega \text{ m}$$

---

$$\Delta T = ?$$

Toplina koja nastaje pri prolasku električne struje kroz vodič se utroši na grijanje vodiča pa vrijedi  $W = Q$ .

$$W = \frac{U^2 \cdot t}{R}$$

$$Q = m c \Delta T$$

Električni otpor raspisujemo izrazom  $R = \rho \frac{\ell}{S}$ , a za masu vrijedi:

$$m = \rho_{Fe} V = \rho_{Fe} S \ell$$

$$\frac{U^2 \cdot t}{R} = m c \Delta T$$

$$\frac{U^2 \cdot t}{\rho \frac{\ell}{S}} = \rho_{Fe} S \ell c \Delta T$$

$$\Delta T = \frac{U^2 \cdot t}{\rho_{Fe} \cdot c \cdot \rho \cdot \ell^2} = \frac{12^2 \cdot 0,5}{7900 \cdot 460 \cdot 10^{-7} \cdot 2^2}$$

$$\Delta T = 49,53 \text{ K}$$

### Primjer 6.

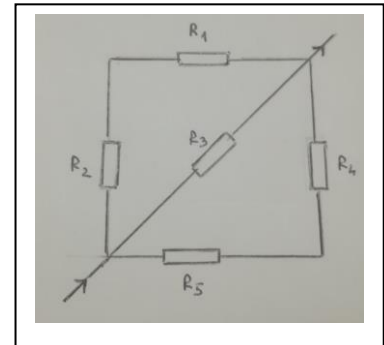
Pet otpornika od  $2 \Omega$  spojeni su prema shemi. Odredite ekvivalentni otpor.

Rješenje:

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 2 \Omega$$

---


$$R_U = ?$$



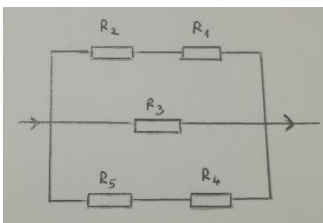
Ukupan otpor od  $N$  serijski spojenih vodiča:

$$R_s = R_1 + R_2 + \dots + R_N$$

Ukupan otpor od  $N$  paralelno spojenih vodiča:

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}$$

Zadana shemu možemo grafički prikazati i ovako:

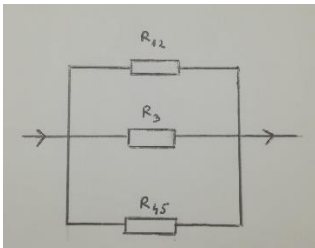


Iz grafičkog prikaza može se uočiti da su otpornici 1 i 2 spojeni serijski pa vrijedi

$$R_{12} = R_1 + R_2 = 4 \Omega$$

Također, otpornici 4 i 5 su isto spojeni serijski pa vrijedi  $R_{45} = R_4 + R_5 = 4 \Omega$

Određivanjem navedenih otpora možemo shemu prikazati ovako:



Pomoću navedene sheme možemo izračunati ekvivalentni otpor u ovom zadatku koristeći matematički izraz za paralelni spoj otpornika budući da su otpornici spojeni paralelno.

$$\frac{1}{R_U} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{45}}$$

$$\frac{1}{R_U} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$R_U = 1 \Omega$$

#### Zadaci:

1. Motor lokomotive djeluje silom od 4500 N i vuče vlak stalnom brzinom 36 km/h. Kolika je jakost struje kroz motor, ako je priključen na napon 500 V, a korisnost je 90 %?
2. Koliki mora biti otpor žice električnog kuhala s kojim se litra vode temperature 20 °C može za 8 minuta dovesti do vrenja? Kuhalo je priključeno na 220 V, a specifični toplinski kapacitet vode iznosi 4,186 kJ/(kg·K), a gustoća vode 1000 kg/m<sup>3</sup>. Zanemarite otpor dovodnih žica i gubitke topline na zagrijavanje okoline.
3. Otpornik od ugljena može služiti za mjerenje temperature. Zimi pri temperaturi 4°C otpor ugljenog štapića iznosi 217,3 Ω. Kolika je temperatura ljeti kad otpor tog istog štapića iznosi 214,2 Ω? Temperaturni koeficijent ugljena je negativan i iznosi  $\alpha = -0.0005$  1/K.
4. Bakrena žica duljine 1000 m ima otpor 1 Ω. Kolika je masa žice? Otpornost bakra je  $1,7 \cdot 10^{-8}$  Ω·m, a gustoća 8900 kg/m<sup>3</sup>.

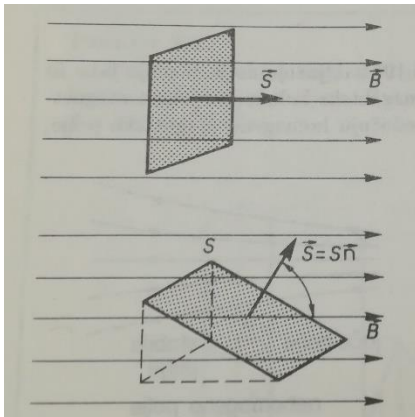
#### Rješenja:

1. 100 A
2. 69,4 Ω
3. 32,47 °C
4. 151,3 kg

# MAGNETSKO POLJE

Magnetski tok  $\Phi$  kroz plohu površine  $S$  jednak je umnošku magnetske indukcije i površine plohe  $S$  kada silnice homogenog magnetskog polja indukcije  $\vec{B}$  prolaze ravnom plohom okomitom na magnetske silnice. Ako ploha nije okomita na silnice, a kut  $\alpha$  označava kut između  $\vec{B}$  i normale  $\vec{n}$  na plohu, tada magnetski tok možemo definirati ovim izrazom:

$$\Phi = B S \cos \alpha$$



Izvor: Kulišić P., Lopac V. 1991.

Ako je u nekoj točki sredstva permeabilnosti  $\mu$  magnetska indukcija jednaka  $\vec{B}$ , tada jakost magnetskog polja  $\vec{H}$  u toj točki definiramo izrazom:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$$

$$\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A} \quad (\text{apsolutna permeabilnost vakuuma})$$

$\mu_r$  – relativna magnetska permeabilnost tvari tj. omjer magnetske indukcije u tvari i vakuumu za istu jakost polja:

$$\mu_r = \frac{B}{B_0}$$



## Magnetska indukcija ravnog vodiča

Iznos magnetske indukcije na udaljenosti  $r$  od ravnog vodiča kojim teče struja jakosti  $I$  jednaka je:

$$B = \mu \frac{I}{2 \pi r}$$

Smjer silnica određujemo pravilom desne ruke. Ako palac pokazuje smjer struje, savijeni prsti pokazuju smjer silnica magnetske indukcije.

## Magnetska indukcija kružne petlje

Označimo li s  $R$  polumjer kružne petlje, iznos magnetske indukcije u središtu kružne petlje kojom teče struja  $I$  dana je izrazom:

$$B = \mu \frac{I}{2 R}$$

Smjer magnetske indukcije kružne petlje određujemo pravilom desne ruke. Obuhvatimo li petlju prstima desne ruke da nam oni pokazuju smjer struje, palac će pokazivati smjer magnetske indukcije.

Iznos magnetske indukcije unutar zavojnice duljine  $\ell$  koja ima  $N$  zavoja kada kroz nju teče jakost struje  $I$  dana je izrazom:

$$B = \mu \frac{N I}{\ell}$$

Smjer magnetske indukcije zavojnice određujemo prema pravilu desne ruke koje kaže: uhvatimo li zavojnicu desnom rukom tako da savijeni prsti pokazuju smjer struje, palac pokazuje smjer magnetske indukcije.

Ako je ravni vodič duljine  $\ell$  kroz koji teče istosmjerna struja u homogenom magnetskom polju, tada na njega djeluje Ampèreova sila  $\vec{F}_A$ , iznosa:

$$F_A = B I \ell \sin \alpha$$

gdje je  $\alpha$  kut između smjera kojim teče struja i smjera vektora  $\vec{B}$ .

Smjer sile (otklona vodiča) određujemo pravilom desne ruke. Postavimo li desni dlan tako da prsti pokazuju smjer magnetske indukcije  $\vec{B}$ , a palac smjer struje  $I$ , sila  $\vec{F}_A$  izlazi okomito iz dlana.

Kada se naboj  $Q$  giba brzinom  $\vec{v}$  u polju magnetske indukcije  $\vec{B}$ , na njega djeluje Lorentzova sila  $\vec{F}_L$ , čiji je iznos dan izrazom:

$$F_L = Q \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha$$

gdje je  $\alpha$  kut između smjera gibanja  $\vec{v}$  i smjera vektora  $\vec{B}$ . U slučaju pozitivnog naboja smjer sile određujemo pravilom desne ruke. Ako ispruženi prsti pokazuju smjer magnetske indukcije  $\vec{B}$ , a palac smjer brzine čestice  $\vec{v}$ , tada je smjer sile okomito iz dlana.

Ako je naboj negativan, sila je suprotnog smjera.

Iznos sile  $F$  kojom međusobno djeluju dva paralelna vodiča duljine  $\ell$ , u vakuumu, razmaknuta za  $r$  kojima prolaze struje  $I_1$  i  $I_2$ , dan je izrazom:

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{r} \ell$$

### Primjer 1.

Ravan vodič duljine 1 m, mase 0,00784 kg, smješten je u zraku okomito na horizontalno magnetsko polje jakosti  $6,34 \cdot 10^3$  A/m. Nađite jakost struje koju moramo propustiti kroz vodič da on u magnetskom polju miruje.

Rješenje:

$$\ell = 1 \text{ m}$$

$$m = 0,00784 \text{ kg}$$

$$H = 6,34 \cdot 10^3 \text{ A/m}$$

$$\alpha = 90^\circ$$

---

$$I = ?$$

Da bi vodič mirovao u magnetskom polju Ampèreova sila, iznosom mora biti jednaka sili teži na vodič.

Ampèreova sila kojom polje magnetske indukcije iznosa  $B$  djeluje na vodič duljine  $\ell$  strujom jakosti  $I$ :

$$F_A = B I \ell \sin \alpha$$

$$F_G = m g$$

$$F_A = F_G$$

Raspisivanjem Ampèreove sile i sile teže dobivamo sljedeći izraz:

$$B I \ell \sin \alpha = m g$$

Magnetsku indukciju možemo raspisati pomoću jakosti magnetskog polja koristeći izraz:

$$B = \mu_0 H$$

Vodič je okomit na magnetsko polje pa je  $\sin \alpha = \sin 90^\circ = 1$ .

$$I = \frac{m g}{B \ell} = \frac{m g}{\mu_0 H \ell} = \frac{0,00784 \cdot 9,81}{12,56 \cdot 10^{-7} \cdot 6,34 \cdot 10^3 \cdot 1}$$

$$I = 9,66 \text{ A}$$

### Primjer 2.

U homogenom magnetskom polju indukcije 1,5 T jednoliko se giba vodič duljine 10 cm, brzinom 1 m/s. Njime teče struja 2 A, a vodič je okomit na magnetsko polje. Kolika mu je snaga potrebna za gibanje?

Rješenje:

$$B = 1,5 \text{ T}$$

$$\ell = 0,1 \text{ m}$$

$$v = 1 \text{ m/s}$$

$$I = 2 \text{ A}$$

---

$$P = ?$$

Sila kojom magnetsko polje djeluje na vodič duljine  $\ell$  strujom jakosti  $I$  može se odrediti iz izraza  $F = B I \ell \sin \alpha$ , gdje je  $\alpha$  kut između smjera magnetske indukcije i smjera struje.

Snaga  $P$  je omjer rada  $W$  i vremenskog intervala  $t$  u kojem je rad izvršen. Ako za vrijeme rada omjer  $W/t$  uvijek ostaje stalan, prosječnu snagu izražavamo pomoću izraza:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v$$

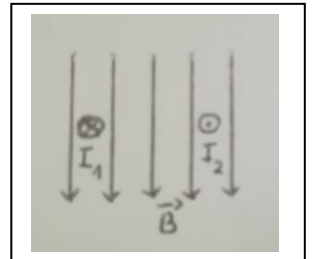
Snaga potrebna za gibanje jednaka je:

$$P = F \cdot v = B \cdot I \cdot \ell \cdot \sin \alpha \cdot v = 1,5 \cdot 2 \cdot 0,1 \cdot \sin 90^\circ \cdot 1$$

$$P = 0,3 \text{ W}$$

### Primjer 3.

Dva ravna paralelna vodiča nalaze se u homogenom magnetskom polju indukcije iznosa 0,16 mT. Vodiči su jedan od drugog udaljeni 5 cm, a struje kroz njih su 20 A u međusobno suprotnim smjerovima. Odredite iznos i smjer sila koje djeluju na dijelove vodiča duge 1,5 m.



Rješenje:

$$B = 0,16 \text{ mT} = 0,16 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

$$r = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$$

$$I_1 = I_2 = I = 20 \text{ A}$$

$$\ell = 1,5 \text{ m}$$

$$\alpha = 90^\circ$$

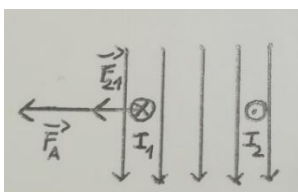
---


$$F = ?$$

Na svaki vodič djeluju dvije magnetske sile. Jedna zbog prolaska struje u polju magnetske indukcije desnog vodiča, a druga zbog prolaska struje kroz homogeno magnetsko polje indukcije  $\vec{B}$ .

Uzmemo li npr. lijevi vodič na slici, možemo odrediti silu  $\vec{F}_{21}$  koja je odbojna sila jer se javlja između dva paralelna vodiča kada njima teku struje suprotnog smjera. Smjer te sile je u lijevu stranu jer se vodiči odbijaju.

Osim sile  $\vec{F}_{21}$  na lijevi vodič djeluje i Ampèreova sila  $\vec{F}_A$  jer se vodič nalazi u magnetskom polju dok njime teče električna struja. Prema pravilu desne ruke smjer sile  $\vec{F}_A$  je također u lijevu stranu.



Rezultantnu silu ćemo dobiti zbrajanjem navedenih sila.

Budući da su sile  $\vec{F}_{21}$  i  $\vec{F}_A$  u istom smjeru, iznos rezultantne sile je:

$$F = F_{21} + F_A$$

$$F_{21} = \frac{\mu}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{I^2 \cdot \ell}{r}$$

$$F_A = B I \ell \sin \alpha$$

Vodič je okomit na magnetsko polje pa je  $\sin \alpha = 1$ .

$$F = I \ell \left( \frac{\mu \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r} + B \right)$$

$$F = 20 \cdot 1,5 \left( \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 20}{2 \cdot \pi \cdot 0,05} + 0,16 \cdot 10^{-3} \right)$$

$$F = 7,2 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

Prema trećem Newtonovom zakonu, sile na vodiče jednakih su iznosa i suprotnih smjerova.

Smjer rezultantne sile na desni vodič je udesno.

#### Primjer 4.

U homogeno magnetsko polje ubačena su istodobno dva elektrona okomito na silnice polja. Brzina drugog elektrona dva je puta veća od brzine prvog. Prvi elektron u polju opisuje kružnicu polumjera 1 cm. Kolika je razlika između promjera kružnica po kojima se gibaju elektroni?

Rješenje:

$$v_2 = 2 v_1$$

$$r_1 = 1 \text{ cm} = 0,01 \text{ m}$$

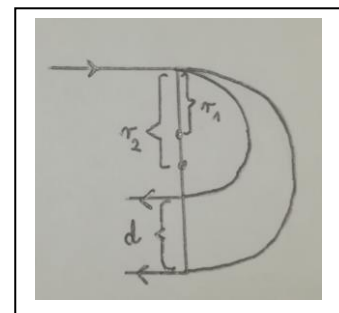
$$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\alpha = 90^\circ$$

---

$$d = ?$$



Kada se u magnetskom polju giba elektron brzinom  $\vec{v}$ , tada na njega djeluje Lorentzova sila.

$F_L = Q v B \sin \alpha$ , gdje je  $\alpha$  kut između smjera magnetske indukcije i smjera gibanja čestice.

Da bi se tijelo mase  $m$  gibalo po kružnici, na njega mora djelovati centripetalna sila koja ima smjer prema središtu kružnice.

$$F_{cp} = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

Pri gibanju tijela po kružnici brzina tijela ostaje jednaka iznosom, ali joj se neprestano mijenja smjer. Centripetalna sila je Lorentzova sila, djeluje okomito na smjer brzine elektrona te zbog toga elektron kruži.

$$F_L = F_{cp} \quad (\alpha = 90^\circ \rightarrow \sin \alpha = 1)$$

$$Q v B = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

$$r = \frac{m \cdot v}{Q \cdot B} \rightarrow B = \frac{m \cdot v}{Q \cdot r}$$

Oba elektrona nalaze se u istom magnetskom polju pa vrijedi:

$$B_1 = B_2$$

$$\frac{m \cdot v_1}{Q \cdot r_1} = \frac{m \cdot v_2}{Q \cdot r_2}$$

Oba elektrona imaju jednake mase i naboje, pa vrijedi:

$$\frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2}$$

$$\frac{v_1}{r_1} = \frac{2 v_1}{r_2}$$

$$r_2 = 2 r_1 = 2 \cdot 0,01 = 0,02 \text{ m}$$

Promjer kružnice prvog elektrona iznosi  $d_1 = 2 r_1 = 2 \cdot 0,01 = 0,02 \text{ m}$ , a promjer kružnice

drugog elektrona  $d_2 = 2 r_2 = 2 \cdot 0,02 = 0,04 \text{ m}$ .

Razlika između promjera kružnica po kojima se gibaju elektroni jednaka je:

$$d = d_2 - d_1 = 0,04 - 0,02$$

$$d = 0,02 \text{ m}$$

### Primjer 5.

Kolika je brzina elektrona koji se ubrzao kroz napon od 100 V? Elektron je u početnoj točki mirovao.

Rješenje:

$$\begin{aligned}U &= 100 \text{ V} \\m_e &= 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\e &= 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\v_1 &= 0 \text{ m/s}\end{aligned}$$

---

$$v_2 = ?$$

Rad električnog polja pri pomicanju naboja  $Q$  jednak je umnošku naboja i napona.

$$W = Q \cdot U$$

Tijelo mase  $m$  i brzine  $\vec{v}$  ima kinetičku energiju.

$$E_k = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Kada tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je izvršenom radu.

$$W = \Delta E$$

Uzevši u obzir zakon očuvanja energije, vrijedi da je rad električnog polja ( $e \cdot U$ ) jednak promjeni kinetičke energije. Brzina elektrona u električnom polju porasla je od  $v_1$  do  $v_2$ , pa vrijedi:

$$Q \cdot U = \Delta E_k$$

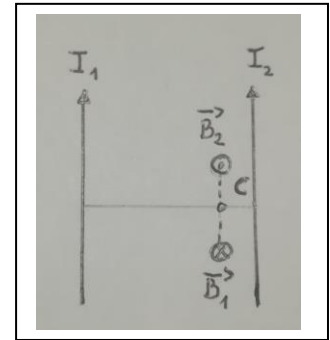
$$e \cdot U = E_{k2} - E_{k1} = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2} = \frac{m \cdot v_2^2}{2} \quad (v_1 = 0 \text{ m/s})$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 100}{9,11 \cdot 10^{-31}}}$$

$$v_2 = 5,93 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

### Primjer 6.

Kroz dvije paralelne žice teku struje 0,4 A i 1 A. Žice su udaljene 10 cm. Koliki je iznos magnetske indukcije u točki C, između tih žica, udaljenoj 2 cm od žice kojom teče veća struja? Struje imaju isti smjer.



Rješenje:

$$I_1 = 0,4 \text{ A}$$

$$I_2 = 1 \text{ A}$$

$$r = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$$

$$r_2 = 2 \text{ cm} = 0,02 \text{ m}$$

$$r_1 = 0,08 \text{ m}$$

---

$$B_C = ?$$

Na udaljenosti  $r$  od ravnog vodiča, iznos magnetske indukcije dan je izrazom:

$$B = \mu \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

U zadanoj točki C javlja se magnetska indukcija  $\vec{B}_1$  koju stvara prvi vodič dok njime teče struja  $I_1$ , ali se javlja i magnetska indukcija  $\vec{B}_2$  koju stvara drugi vodič dok njime teče struja  $I_2$ .

$$B_1 = \mu \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot r_1} = 4 \pi 10^{-7} \cdot \frac{0,4}{2 \cdot \pi \cdot 0,08} = 10^{-6} \text{ T}$$

$$B_2 = \mu \frac{I_2}{2 \cdot \pi \cdot r_2} = 4 \pi 10^{-7} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 0,02} = 10^{-5} \text{ T}$$

Smjer pojedinog magnetskog polja određujemo pravilom desne ruke gdje nam palac predstavlja smjer struje koja teče vodičem, a savijeni prsti smjer silnica magnetskog polja.

Magnetska indukcija  $\vec{B}_1$  ima smjer okomito u ravninu papira, a magnetska indukcija  $\vec{B}_2$  okomito iz ravnine papira kao što je prikazano na slici.

Rezultantna magnetska indukcija je vektorski zbroj  $\vec{B}_1$  i  $\vec{B}_2$ .

Brojčanu vrijednost rezultantne magnetske indukcije dobit ćemo oduzimanjem manjeg vektora od većeg.



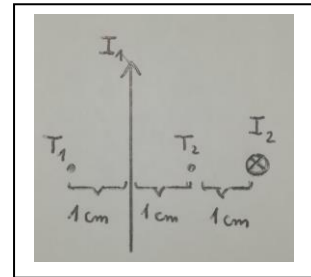
$$B_C = B_2 - B_1 = 10^{-5} - 10^{-6}$$

$$B_C = 9 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

Zadaci:

1. U homogenom magnetskom polju indukcije 0,2 T nalazi se ravni bakreni vodič površine poprečnog presjeka  $5 \text{ mm}^2$ . Kut između smjera magnetskog polja i vodiča kojim prolazi struja iznosi  $30^\circ$ . Kolika struja prolazi vodičem ako je sila kojom magnetsko polje djeluje na vodič jednaka sili teži na vodič? (Gustoća bakra je  $8900 \text{ kg/m}^3$ ).

2. Dva beskonačna ravna vodiča kojima teku struje jakosti  $I_1 = 2 \text{ A}$  i  $I_2 = 3 \text{ A}$  postavljena su u međusobno okomitim ravninama i razmaknuta za 2 cm kao na crtežu. Izračunajte iznos magnetske indukcije  $B$  u točkama  $T_1$  i  $T_2$  koje su za 1 cm udaljene od svakog vodiča.



3. Deuteron (jezgra izotopa vodika), mase  $3,32 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ , uleti okomito u homogeno magnetsko polje indukcije  $B = 1,5 \text{ T}$ .
  - a) Kolika je brzina kojom se giba deuteron ako je polumjer kružnice koju opisuje 0,03 m?
  - b) Kroz koliku razliku potencijala se morao ubrzati deuteron da postigne tu brzinu?
4. Dvama ravnim, paralelnim vodičima međusobno udaljenim 15 cm teku struje 2 A i 1,5 A u istom smjeru. Na kojoj udaljenosti od prvog vodiča je magnetska indukcija jednaka nuli?
5. Izračunajte polumjer D-elektroda ciklotrona i frekvenciju kruženja protona u ciklotronu ako pri izlasku iz ciklotrona proton ima energiju 10 MeV. Indukcija magnetskog polja ciklotrona je 1,4 T. ( $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ )
6. Između polova magneta na dvije tanke niti obješen je vodič mase 10 g i duljine 20 cm. Vodič stoji horizontalno u vertikalnom magnetnom polju od 0,25 T. Za koliki kut od vertikale će se otkloniti niti o koje je obješen vodič kada kroz njega prolazi struja jakosti 2 A?
7. U akceleratoru čestica proton naboja  $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  ima količinu gibanja  $4,8 \cdot 10^{-16} \text{ kgm/s}$  i giba se po kružnici polumjera 1 km. Kolika je indukcija magnetskog polja koje proizvodi ovakvo gibanje?

Rješenja:

1. 4,37 A
2.  $B_1 = 7,2 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ ,  $B_2 = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$
3. a)  $2,17 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ , b)  $4,9 \cdot 10^4 \text{ V}$
4. 8,57 cm
5. 32,6 cm, 21 MHz
6.  $44,45^\circ$
7. 3 T

# ELEKTROMAGNETSKA INDUKCIJA

Elektromagnetska indukcija je pojava induciranja napona u petlji (ili zavojnici) zbog promjene magnetskog toka kroz tu petlju (zavojnicu).

$$U_i = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Faradayev zakon elektromagnetske indukcije kaže da je inducirani napon proporcionalan brzini promjene magnetskog toka kroz zavojnicu.  $\Delta\Phi$  je promjena magnetskog toka u svakome od namotaja (svakoj petlji) te zavojnice, gdje je  $N$  broj namotaja.

Predznak minus posljedica je zakona očuvanja energije i objašnjava se Lenzovim pravilom: inducirana struja ima uvijek takav smjer da stvara magnetski tok koji se suprotstavlja promjeni toka zbog kojeg je nastala.

Kada se ravni vodič duljine  $\ell$  giba brzinom  $\vec{v}$  u homogenom magnetskom polju indukcije  $\vec{B}$  i pod kutom  $\alpha$  u odnosu na polje, u vodiču se inducira napon koji je jednak:

$$U_i = B \ell v \sin \alpha$$

Induktivitet zavojnice koja ima površinu presjeka  $S$ , duljinu  $\ell$  i jezgru permeabilnosti

$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ , s  $N$  namotaja iznosi:

$$L = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N^2 \cdot S}{\ell}$$

Promjenom struje kroz petlju ili zavojnicu, dolazi do promjene magnetskog toka u njima. Prema zakonu elektromagnetske indukcije ta će promjena toka inducirati elektromotorni napon u toj petlji ili zavojnici.

Samoindukcija je pojava induciranja napona između krajeva zavojnice zbog promjene magnetskog toka koji je nastao zbog promjene struje kroz nju, a elektromotorni napon samoindukcije dan je izrazom:

$$U_L = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

Energija magnetskog polja zavojnice dana je izrazom:

$$E_B = \frac{1}{2} L I^2$$

Primjer 1.

Zavojnica ima 100 zavoja, otpor  $6 \Omega$  i površinu presjeka od  $80 \text{ cm}^2$ . Kolikom brzinom se mijenja magnetska indukcija usmjerena okomito na površinu poprečnog presjeka zavojnice ako se u njoj inducira struja jakosti  $1 \text{ mA}$ ?

Rješenje:

$$N = 100$$

$$R = 6 \Omega$$

$$S = 80 \text{ cm}^2 = 0,008 \text{ m}^2$$

$$I = 1 \text{ mA} = 0,001 \text{ A}$$

---

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = ?$$

Za vodič vrijedi Ohmov zakon ako je otpor vodiča uz stalnu temperaturu stalan.

$$I = \frac{U}{R} \rightarrow U = R \cdot I$$

Tok homogenoga magnetskog polja kroz površinu plohe  $S$ , okomitu na smjer magnetske indukcije  $\vec{B}$ , jednak je umnošku magnetske indukcije i površine plohe  $S$ .

$$\Phi = B \cdot S$$

Napon  $U_i$  koji se inducira u zavojnici s  $N$  namotaja razmjeran je brzini promjene magnetskog toka kroz tu zavojnicu.

$$U_i = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

Predznak minus u tom izrazu možemo izostaviti jer nas zanima samo iznos napona, a ne njegov smjer.

$$\Delta\Phi = \Delta B \cdot S \quad (\text{Površina } S \text{ kojom prolazi tok se ne mijenja.})$$

$$U_i = N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Uvrštavanjem prve u drugu jednadžbu dobijemo:

$$U_i = N \frac{\Delta B \cdot S}{\Delta t} = N \cdot S \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

$$U_i = R \cdot I_i$$

Izjednačavanjem desnih strana jednadžbi dobije se:

$$R \cdot I_i = N \cdot S \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{R \cdot I_i}{N \cdot S} = \frac{6 \cdot 0,001}{100 \cdot 0,008}$$

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = 0,0075 \text{ T/s}$$

### Primjer 2.

Metalni obroč otpora  $2 \Omega$  nalazi se u homogenome magnetskom polju. Obroč je postavljen okomito na magnetske silnice. Kolika količina naboja proteče obručem kada se magnetski tok promijeni za  $5 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$ ?

Rješenje:

$$R = 2 \Omega$$

$$\Delta\Phi = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$N = 1$$

$$\alpha = 90^\circ$$

---

$$\Delta Q = ?$$

Napon koji se inducira u metalnom obroču razmjernan je brzini promjene magnetskog toka.

$$U_i = - \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad (N = 1 \text{ za metalni obroč})$$

Znak minus označava da inducirani napon daje induciranu struju takva smjera da njezino magnetsko polje nastoji poništiti promjenu magnetskog toka koja ju je proizvela. U zadatku se traži brojčana vrijednost pa ćemo predznak minus izostaviti u daljnjem postupku.

Za vodič vrijedi Ohmov zakon ako je otpor vodiča uz stalnu temperaturu stalan.

$$I = \frac{U}{R} \rightarrow U = R \cdot I$$

Jakost električne struje možemo zapisati kao omjer električnog naboja  $\Delta Q$  i vremenskog intervala  $\Delta t$  u kojemu taj naboj prođe presjekom vodiča.

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Uzevši u obzir navedene izraze, inducirani napon možemo zapisati na dva načina:

$$U_i = R \cdot I_i$$

$$U_i = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

Izjednačit ćemo desne strane jednadžbi jer su nam lijeve strane jednake.

$$R \cdot I_i = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \quad \left( I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \right)$$

$$R \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

$$\Delta Q = \frac{\Delta \Phi \cdot \Delta t}{R \cdot \Delta t} = \frac{\Delta \Phi}{R}$$

$$\Delta Q = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{2}$$

$$\Delta Q = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ C}$$

### Primjer 3.

Kolikom brzinom se mora gibati vodič dug 0,5 m u Zemljinom magnetskom polju da bi se na krajevima vodiča inducirao jednak napon kao u zavojnici s 200 zavoja u kojoj je brzina promjene magnetskog toka 30 mWb/s? ( $B_{Zemlje} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ )

Rješenje:

$$\ell = 0,5 \text{ m}$$

$$N = 200$$

$$B_{Zemlje} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 30 \text{ mWb/s} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ Wb/s}$$

---

$$v = ?$$

Napon  $U_i$  koji se inducira u zavojnici s  $N$  zavoja razmjeran je brzini promjene magnetskog toka.

$$U_i = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = U_{1i}$$

Predznak minus u tom izrazu možemo izostaviti jer se u zadatku traži iznos napona.

Inducirani napon vodiča duljine  $\ell$  koji se u magnetskom polju indukcije  $\vec{B}$  giba brzinom  $\vec{v}$  definiran je izrazom:

$$U_i = B \ell v \sin \alpha.$$

$$\text{Za } \alpha = 90^\circ \text{ vrijedi: } U_i = B \ell v = U_{2i}$$

Inducirani naponi moraju biti jednaki, pa vrijedi

$$U_{1i} = U_{2i}$$

$$N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = B \ell v$$

$$v = \frac{N}{B \cdot \ell} \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{200 \cdot 0,03}{5 \cdot 10^{-5} \cdot 0,5}$$

$$v = 240 \text{ km/s}$$

Zadaci:

1. Zavojnica s 80 zavoja i promjera 8 cm nalazi se u homogenom magnetskom polju indukcije 0,06 T. Iznos magnetske indukcije se smanji na 0 T u vremenu od 0,1 s. Odredite iznos induciranog napona u zavojnici.
2. Na krajevima vodiča dugačkog 0,20 m stvori se razlika potencijala od 12 mV kada se giba stalnom brzinom od 3,0 m/s okomito kroz homogeno magnetsko polje indukcije iznosa B. Koliki je iznos magnetske indukcije B?
3. U zavojnici induktiviteta 0,6 H promjenom jakosti struje inducira se napon 2,8 V. Kolika je srednja brzina promjene jakosti struje?

Rješenja:

1. 0,24 V
2. 0,02 T
3.  $\frac{\Delta I}{\Delta t} = 4,67 \text{ A/s}$



## Literatura:

1. Kulišić, P., Lopac, V., 1991., *Elektromagnetske pojave i struktura tvari*, Zagreb, Školska knjiga
2. Stanić, E., 1998., *Osnove elektrotehnike*, Zagreb, Školska knjiga
3. Supek, I., Furić, M., 1994., *Počela fizike*, Zagreb, Školska knjiga
4. Brković, N., 2001., *Zbirka zadataka iz fizike*, Zagreb, Luk d.o.o.
5. Mikuličić, B., Vernić E., Varićak, M. 2001., *Zbirka zadataka iz fizike*, Zagreb, Školska knjiga
6. Muić, S., 2010., *Fizika – zbirka zadataka*, Zagreb, Element